22) $f(x) = x^2 - 4x + 2, \; x \in \mathbb{R}$

α) $f'(x) = (x^2 - 4x + 2)' = 2x - 4$

β) Θα πρέπει $\lambda = \varepsilon\varphi 45^\circ \Leftrightarrow f'(x) = 1 \Leftrightarrow$

$2x - 4 = 1 \Leftrightarrow 2x = 5 \Leftrightarrow x = 5/2$

$f\left(\frac{5}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{5}{2} + 2 = \frac{25}{4} - 10 + 2 = \frac{25}{4} - \frac{8}{1} =$

$= \frac{25 - 32}{4} = \frac{-7}{4}$.

Συνεπώς το σημείο είναι το $A\left(\frac{5}{2}, -\frac{7}{4}\right)$

23) $f(x) = 2x^2 - \alpha x + \beta \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Για να είναι εφαπτομένη η $y = 3x - 1$ στο σημείο με τετμημένη 2 θα πρέπει $f'(2) = 3$ και επίσης η ευθεία να διέρχεται από το σημείο $(2, f(2))$

$f(2) = 2 \cdot 2^2 - \alpha \cdot 2 + \beta \Leftrightarrow f(2) = 8 - 2\alpha + \beta$

$f'(x) = (2x^2 - \alpha x + \beta)' = 4x - \alpha$

Επειδή $f'(2) = 3 \Leftrightarrow 4 \cdot 2 - \alpha = 3 \Leftrightarrow 8 - \alpha = 3 \Leftrightarrow 5 = \alpha$

Επιπλέον η $y = 3x - 1$ διέρχεται από το σημείο $(2, f(2))$

άρα $f(2) = 3 \cdot 2 - 1 \Leftrightarrow 8 - 2\alpha + \beta = 6 - 1 \Leftrightarrow$

$8 - 2 \cdot 5 + \beta = 5 \Leftrightarrow -2 + \beta = 5 \Leftrightarrow \beta = 7$.

24) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 2x + 1$, $x \in \mathbb{R}$

α) $f'(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 2x + 1\right)' = \frac{1}{3}(x^3)' + (x^2)' - 2(x)' + (1)' =$

$\frac{1}{3} \cdot 3x^2 + 2x - 2 \cdot 1 + 0 = x^2 + 2x - 2$.

β) Οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της f που είναι παράλληλες με την ευθεία $y = x + 3$ έχουν την ίδια κλίση, άρα πρέπει

$f'(x) = 1 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16$

$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-2 \pm 4}{2} = \begin{cases} \frac{-2+4}{2} = \frac{2}{2} = 1 \\ \frac{-2-4}{2} = \frac{-6}{2} = -3 \end{cases}$

Άρα τα σημεία είναι τα $A(1, f(1))$ και $B(-3, f(-3))$

$f(1) = \frac{1}{3} \cdot 1^3 + 1^2 - 2 \cdot 1 + 1 = \frac{1}{3} + 1 - 2 + 1 = \frac{1}{3}$ $\quad A\left(1, \frac{1}{3}\right)$

$f(-3) = \frac{1}{3} \cdot (-3)^3 + (-3)^2 - 2 \cdot (-3) + 1 = -9 + 9 + 6 + 1 = 7$

$B(-3, 7)$

Η εφαπτομένη είναι της μορφής $y = x + \beta$ και διέρχεται από το $A(1, 1/3)$. Άρα

$\frac{1}{3} = 1 + \beta \Leftrightarrow \frac{1}{3} - 1 = \beta \Leftrightarrow -\frac{2}{3} = \beta$. Συνεπώς $y = x - \frac{2}{3}$

Αντίστοιχα για το σημείο $B(-3, 7)$ έχουμε:

$7 = -3 + \beta \Leftrightarrow 10 = \beta$. Συνεπώς $y = x + 10$

25) $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x - 3 \ , \ x \in \mathbb{R}$

α) $f'(x) = (x^3 - 9x^2 + 15x - 3)' = (x^3)' - 9\cdot(x^2)' + 15(x)' - (3)' =$

$3x^2 - 18x + 15$

β) $f'(x) = 3x^2 - 18x + 15$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-18)^2 - 4\cdot 3\cdot 15 = 324 - 180 = 144$

$x_{1,2} = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \dfrac{18 \pm 12}{2\cdot 3} = \left\langle \begin{array}{l} \dfrac{18+12}{6} = \dfrac{30}{6} = 5 \\ \dfrac{18-12}{6} = \dfrac{6}{6} = 1 \end{array}\right.$

x	$-\infty$		1		5		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$		↗		↘		↗	
			Τ.Μ		Τ.Ε		

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 1]$ και στο $[5, +\infty)$

και γνησίως φθίνουσα στο $[1, 5]$

γ) Η f εμφανίζει τοπικό μέγιστο στο σημείο $x = 1$ ίσο

με $f(1) = 1^3 - 9\cdot 1^2 + 15\cdot 1 - 3 = 1 - 9 + 15 - 3 = 4$

Επίσης, εμφανίζει τοπικό ελάχιστο στο σημείο $x = 5$

ίσο με $f(5) = 5^3 - 9\cdot 5^2 + 15\cdot 5 - 3 = 125 - 225 + 75 - 3 = -28$

26) $f(x) = 2x^2 - 4x - 1 \qquad g(x) = 4x - x^2 + 2 \ , \ x \in \mathbb{R}$

α) $f'(x) = (2x^2 - 4x - 1)' = 2(x^2)' - 4(x)' - (1)' = 4x - 4$

$g'(x) = (4x - x^2 + 2)' = 4(x)' - (x^2)' + (2)' = 4 - 2x$

β) $f'(x) = 4x-4$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 4x-4=0$

$\Leftrightarrow x=1$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	ελαχ.	$\nearrow$	

Η f εμφανίζει ελάχιστο στο σημείο $x=1$.

$g'(x) = 4-2x$

$g'(x)=0 \Leftrightarrow 4-2x=0$

$\Leftrightarrow 2=x$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\nearrow$	μεγ.	$\searrow$	

Η g εμφανίζει μέγιστο στο σημείο $x=2$

γ) Το ελάχιστο της f είναι ίσο με $f(1)=2\cdot 1^2-4\cdot 1-1$ $= 2-4-1 = -3$

Το μέγιστο της g είναι ίσο με $g(2)=4\cdot 2-2^2+2$ $= 8-4+2 = 6$.

27) $f(x) = \frac{1}{3}x^3-2x^2-5x-2, \ x\in\mathbb{R}$

α) $f'(x) = \left(\frac{1}{3}x^3-2x^2-5x-2\right)' = \frac{1}{3}(x^3)'-2(x^2)'-5(x)'-(2)' =$

$\frac{1}{3}\cdot 3x^2-2\cdot 2x-5\cdot 1-0 = x^2-4x-5$

β) $f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2-4x-5=0$

$\Delta = \beta^2-4\alpha\gamma = (-4)^2-4\cdot 1(-5) = 16+20 = 36$

$x_{1,2} = \frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{4\pm 6}{2} = \left\langle \begin{array}{l} \frac{4+6}{2} = \frac{10}{2} = 5 \\ \frac{4-6}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \end{array}\right.$

γ)

x	$-\infty$		-1		5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
			Τ.μ		Τ.ε		

Για $x=-1$ έχουμε τοπικό μέγιστο και για $x=5$ έχουμε τοπικό ελάχιστο.

δ) Το τοπικό μέγιστο είναι $f(-1) = \frac{1}{3}(-1)^3 - 2(-1)^2 - 5(-1) - 2$

$= -\frac{1}{3} - 2 + 5 - 2 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

Το τοπικό ελάχιστο είναι $f(5) = \frac{1}{3}5^3 - 2\cdot 5^2 - 5\cdot 5 - 2$

$= \frac{125}{3} - 50 - 25 - 2 = \frac{125}{3} - \frac{77}{1} = \frac{125-231}{3} = -\frac{106}{3}$

28) $f(x) = k\cdot x^2 + \lambda x + 3$, $x \in \mathbb{R}$ $k,\lambda \in \mathbb{R}$

α) Θα πρέπει να ικανοποιούνται οι συνθήκες $f(1) = -2$ και $f'(1) = 0$

$f'(x) = (kx^2 + \lambda x + 3)' = k(x^2)' + \lambda(x)' + (3)' = 2kx + \lambda$

Άρα θα έχουμε:

$f(1) = -2 \Leftrightarrow k\cdot 1^2 + \lambda \cdot 1 + 3 = -2 \Leftrightarrow k + \lambda = -5$

$f'(1) = 0 \Leftrightarrow 2k + \lambda = 0$. Συνεπώς

$\begin{cases} k+\lambda = -5 \\ 2k+\lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k-2k = -5 \\ \lambda = -2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -k = -5 \\ \lambda = -2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 5 \\ \lambda = -10 \end{cases}$

β) Για $k=5$, $\lambda=-10$ έχουμε $f(x) = 5x^2 - 10x + 3$

και $f'(x) = 10x - 10$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 10x - 10 = 0 \Leftrightarrow$

$x = 1$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	
			Ελαχ		

Η f παρουσιάζει ελάχιστο στη θέση $x=1$.

29) $f(x) = x^3 - 3x \,, \; x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = (x^3-3x)' = (x^3)' - 3\cdot(x)' = 3x^2 - 3$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-3=0$$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 0^2 - 4\cdot 3\cdot(-3) = 36$$

$$x_{1,2} = \frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{0\pm 6}{2\cdot 3} = \left\langle \begin{array}{l} \frac{6}{6}=1 \\ \frac{-6}{6} = -1 \end{array}\right.$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

α) Η f είναι αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty,-1]$ και $[1,+\infty)$

β) Η f είναι φθίνουσα στο διάστημα $[-1,1]$

30) $f(x) = x^2\cdot e^{-x}$

α) $f'(x) = (x^2\cdot e^{-x})' = (x^2)'\cdot e^{-x} + x^2\cdot(e^{-x})' =$

$= 2x\cdot e^{-x} + x^2\cdot e^{-x}\cdot(-1) = x\cdot e^{-x}(2-x)$

$f''(x) = (f'(x))' = (x\cdot(2-x)\cdot e^{-x})' =$

$(x)'\cdot(2-x)e^{-x} + x\cdot(2-x)'\cdot e^{-x} + x(2-x)\cdot(e^{-x})' =$

$1\cdot(2-x)e^{-x} + x\cdot(-1)\cdot e^{-x} + x\cdot(2-x)\cdot e^{-x}(-1) =$

$e^{-x}\cdot(2-x-x-x(2-x)) = e^{-x}\cdot(2-2x-2x+x^2) =$

$e^{-x}\cdot(x^2-4x+2)$.

β) $f'(x) = x\cdot e^{-x}\cdot(2-x)$

Επειδή $e^{-x}>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ το πρόσημο της $f'(x)$ καθορίζεται από το γινόμενο $x\cdot(2-x)$. Άρα

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$2-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	Τ.Ε.	$\nearrow$	Τ.μ.	$\searrow$	

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty,0]$ κ' $[2,+\infty)$. Επιπλέον, είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,2]$

γ) Η f εμφανίζει τοπικό ελάχιστο στο σημείο $x=0$ ίσο με $f(0)=0^2\cdot e^{-0}=0$

Επίσης, εμφανίζει τοπικό μέγιστο στο σημείο $x=2$ ίσο με $f(2)=2^2\cdot e^{-2}=4\cdot e^{-2}=\dfrac{4}{e^2}$

31) $f(x)=(2x-x^2)\cdot e^x \ , x\in\mathbb{R}$

α) Η f ορίζεται για κάθε $x\in\mathbb{R}$ άρα $A=\mathbb{R}$

$$f'(x)=\left((2x-x^2)\cdot e^x\right)'=(2x-x^2)'\cdot e^x+(2x-x^2)(e^x)'=$$
$$(2-2x)\cdot e^x+(2x-x^2)\cdot e^x=e^x\cdot(2-2x+2x-x^2)=$$
$$e^x\cdot(-x^2+2)$$

$$f''(x)=(f'(x))'=\left(e^x(-x^2+2)\right)'=(e^x)'(-x^2+2)+e^x(-x^2+2)'=$$
$$e^x\cdot(-x^2+2)+e^x(-2x)=e^x(-x^2-2x+2)$$

β) $f'(x) = e^x(-x^2+2)$

Επειδή $e^x>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, το πρόσημο της $f'(x)$ καθορίζεται από το τριώνυμο $-x^2+2$.

$-x^2+2$

$\Delta = \beta^2-4\alpha\gamma = 0^2-4\cdot(-1)\cdot 2 = 8$

$$x_{1,2} = \frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{0\pm\sqrt{8}}{2\cdot(-1)} = \begin{cases} \frac{\sqrt{8}}{-2} = \frac{2\sqrt{2}}{-2} = -\sqrt{2} \\ \frac{-\sqrt{8}}{-2} = \frac{-2\sqrt{2}}{-2} = \sqrt{2} \end{cases}$$

$\sqrt{8} = \sqrt{4\cdot 2} = \sqrt{4}\cdot\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$-x^2+2$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↘		↗		↘	
			Τ.Ε		Τ.Μ		

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$ και γνησίως φθίνουσα στα $(-\infty,-\sqrt{2}]$ και $[\sqrt{2},+\infty)$

Η f εμφανίζει τοπικό ελάχιστο στο σημείο $x=-\sqrt{2}$ ίσο με $f(-\sqrt{2}) = (2(-\sqrt{2})-(-\sqrt{2})^2)\,e^{-\sqrt{2}} = (-2\sqrt{2}-2)\cdot e^{-\sqrt{2}}$

Επίσης, εμφανίζει τοπικό μέγιστο στο σημείο $x=\sqrt{2}$ ίσο με $f(\sqrt{2}) = (2\sqrt{2}-\sqrt{2}^2)\,e^{\sqrt{2}} = (2\sqrt{2}-2)\cdot e^{\sqrt{2}}$

32) $f(x) = \kappa x^3+\lambda x^2+3x-1 \quad x\in\mathbb{R} \quad \kappa,\lambda\in\mathbb{R}$

α) $f'(x) = (\kappa x^3+\lambda x^2+3x-1)' = (\kappa x^3)'+(\lambda x^2)'+(3x)'-(1)' =$

$\kappa\cdot 3x^2+\lambda\cdot 2x+3-0 = 3\kappa x^2+2\lambda x+3$

β) Θα πρέπει να ικανοποιούνται οι συνθήκες $f'(2)=0$ και $f'(-2)=0$. Άρα,

$f'(2)=0 \Leftrightarrow 3\kappa\cdot 2^2+2\lambda\cdot 2+3=0 \Leftrightarrow 12\kappa+4\lambda+3=0$ ①

$f'(-2)=0 \Leftrightarrow 3\kappa(-2)^2+2\lambda(-2)+3=0 \Leftrightarrow 12\kappa-4\lambda+3=0$ ②

Από τις ① κ ② παίρνουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} 12\kappa+4\lambda+3=0 \\ 12\kappa-4\lambda+3=0 \end{cases}$$

Με πρόσθεση κατά μέλη δίνει:

$24\kappa+6=0 \Leftrightarrow 24\kappa=-6$

$\Leftrightarrow \kappa=-\frac{1}{4}$

Άρα $12\cdot\kappa+4\lambda+3=0 \Leftrightarrow 12\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)+4\lambda+3=0 \Leftrightarrow$

$-3+4\lambda+3=0 \Leftrightarrow 4\lambda=0 \Leftrightarrow \lambda=0$

Συνεπώς $\kappa=-\frac{1}{4}$, $\lambda=0$

γ) Για $\kappa=-\frac{1}{4}$, $\lambda=0$ έχουμε $f(x)=-\frac{1}{4}x^3+3x-1$

$f'(x) = -\frac{3}{4}x^2+3$

$\Delta = \beta^2-4\alpha\gamma = 0^2-4\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot 3 = 9$

$x_{1,2} = \frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\cdot\alpha} = \frac{\pm 3}{2\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)} = \begin{cases} \frac{3}{-\frac{6}{4}} = -\frac{12}{6} = -2 \\ \frac{-3}{-\frac{6}{4}} = \frac{12}{6} = 2 \end{cases}$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↘	Τ.Ε	↗	Τ.μ	↘	

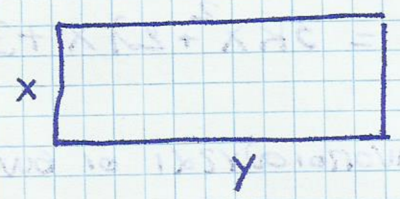
Η f εμφανίζει τοπικό ελάχιστο για $x=-2$ ίσο με $f(-2) =$

$-\frac{1}{4}(-2)^3+3\cdot(-2)-1 = \frac{8}{4}-6-1 = -5.$

Επίσης εμφανίζει τοπικό μέγιστο για $x=2$ ίσο με

$$f(2) = -\frac{1}{4}2^3+3\cdot 2-1 = -\frac{8}{4}+6-1 = 3$$

33)



Έστω ορθογώνιο με πλευρές x, y τότε η περίμετρος δίνεται από τη σχέση $\Pi(x,y) = 2x+2y$ και το εμβαδόν του από την σχέση $E(x,y) = x\cdot y$

Ας θεωρήσουμε τα ορθογώνια με περίμετρο σταθερή ίση με C όπου C πραγματικός αριθμός. Τότε

$$2x+2y = C \Leftrightarrow 2y = C-2x \Leftrightarrow y = \frac{C-2x}{2}$$

Συνεπώς, $E = x\cdot y = x\cdot\left(\frac{C-2x}{2}\right) = \frac{x\cdot(C-2x)}{2}$

$$E'(x) = \left(\frac{x\cdot(C-2x)}{2}\right)' = \left(\frac{Cx-2x^2}{2}\right)' = \frac{1}{2}\left(Cx-2x^2\right)' =$$

$$\frac{1}{2}\left((Cx)'-(2x^2)'\right) = \frac{1}{2}\left(C-4x\right)$$

$$E'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(C-4x)=0 \Leftrightarrow C-4x=0 \Leftrightarrow C=4x \Leftrightarrow \boxed{\frac{C}{4}=x}$$

x	0	$C/4$	$C/2$
$E'(x)$	$+$	0	$-$
$E(x)$	$\nearrow$	Τ.μ	$\searrow$

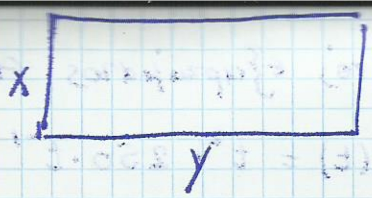
Το εμβαδόν γίνεται μέγιστο όταν $x = \frac{C}{4}$. Τότε $y = \frac{C-2\cdot\frac{C}{4}}{2} \Leftrightarrow$

$$y = \frac{C-\frac{C}{2}}{2} \Leftrightarrow y = \frac{\frac{C}{2}}{2} \Leftrightarrow$$

$$y = \frac{C}{4}$$

Άρα $x = y = \frac{C}{4}$. Δηλαδή το σχήμα είναι τετράγωνο με πλευρά $C/4$

34)



Με $x>0$
$y>0$

Έστω ορθογώνιο με πλευρές x, y και εμβαδόν $1600\,m^2$

Άρα $x \cdot y = 1600$

Η περίμετρος δίνεται από τη σχέση $\Pi(x,y) = 2x + 2y$

Συνεπώς, $x \cdot y = 1600 \Leftrightarrow y = \dfrac{1600}{x}$

Άρα $\Pi(x) = 2x + 2 \cdot \dfrac{1600}{x} = 2x + \dfrac{3200}{x}$

$$\Pi'(x) = \left(2x + \frac{3200}{x}\right)' = (2x)' + \left(\frac{3200}{x}\right)' = 2 - \frac{3200}{x^2} =$$

$$= \frac{2x^2 - 3200}{x^2} = \frac{2(x^2 - 1600)}{x^2}$$

Επειδή $2>0$ και $x^2>0$ για $x>0$ το πρόσημο της $\Pi'(x)$ καθορίζεται από το τριώνυμο $x^2 - 1600$

$$x^2 - 1600 = x^2 - 40^2 = (x-40)(x+40)$$

έχει ρίζες ± 40

x	$-\infty$	-40		0		40		$+\infty$
$x^2 - 1600$	$+$	0	$-$			0	$+$	
$\Pi'(x)$					$-$	0	$+$	
$\Pi(x)$					$\searrow$	ελαχ.	$\nearrow$	

Η μικρότερη περίμετρος είναι όταν $x = 40$ τότε

$y = \dfrac{1600}{x} = \dfrac{1600}{40} = 40$. Δηλαδή $x = y = 40$

Δηλαδή το ορθογώνιο είναι τετράγωνο πλευράς $40\,m$

35) Η τιμή πώλησης ενός εξαρτήματος είναι $E = 1000$ €

Το κόστος του είναι $K(t) = t^2 + 250 \cdot t^{-1}$

α) Το κέρδος είναι $P(t) = E - K(t) = 1000 - t^2 - 250 \cdot t^{-1}$

$$P'(t) = \left(1000 - t^2 - 250 \cdot t^{-1}\right)' = (1000)' - (t^2)' - 250\left(t^{-1}\right)' =$$

$$= 0 - 2t - 250 \cdot (-1) \cdot \frac{1}{t^2} = -2t + 250 \cdot \frac{1}{t^2} =$$

$$= \frac{-2t^3 + 250}{t^2} = \frac{2 \cdot (-t^3 + 125)}{t^2}$$

Επειδή $t > 0$ (ώρες) τότε $2 > 0$, $t^2 > 0$ συνεπώς το πρόσημο της $P'(t)$ εξαρτάται από το πρόσημο του πολυωνύμου $-t^3 + 125$

$$-t^3 + 125 = 0 \Leftrightarrow t^3 = 125 \Leftrightarrow t = \sqrt[3]{125} \Leftrightarrow t = 5$$

t	$-\infty$	0		5		$+\infty$
$-t^3+125$		+		0	−	
$P'(t)$			+	0	−	
$P(t)$			↗	μεγ.	↘	

Για $t = 5$ ώρες πραγματοποιήθηκε το μέγιστο κέρδος

Το μέγιστο κέρδος είναι $P(5) = 1000 - 5^2 - 250 \cdot 5^{-1} =$

$$1000 - 25 - \frac{250}{5} = 1000 - 25 - 50 = 1000 - 75 = 925$$

36) Έστω X η τιμή του εισιτηρίου. Το κέρδος ανά επιβάτη είναι

$$P(t) = X - k(t) = X - t^2 - \frac{250}{t} \quad \text{με } t \in (0, 8]$$

α) $P'(t) = \left(X - t^2 - \frac{250}{t}\right)' = (X)' - (t^2)' - \left(\frac{250}{t}\right)' =$

$$0 - 2t + \frac{250}{t^2} = \frac{-2t^3+250}{t^2} = \frac{2(-t^3+125)}{t^2}$$

Επειδή $2>0$ κ' $t^2>0$ το πρόσημο της $P'(t)$ εξαρτάται από το πρόσημο της $-t^3+125$

$$-t^3+125=0 \Leftrightarrow t^3=125 \Leftrightarrow t=\sqrt[3]{125} \Leftrightarrow t=5$$

t	0		5		8
$-t^3+125$		+	0	−	
$P'(t)$		+	0	−	
$P(t)$		↗	μεγ.	↘	

Το μέγιστο κέρδος πραγματοποιήθηκε όταν $t=5$ έτη

β) Τότε, το μέγιστο κέρδος ήταν $P(5) = 25 \Leftrightarrow$

$$X - 5^2 - \frac{250}{5} = 25 \Leftrightarrow X - 25 - 50 = 25 \Leftrightarrow$$

$$X = 25+50+25 \Leftrightarrow X = 100\ €$$