ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ
ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ - ΑΚΡΟΤΑΤΑ

Απαντήσεις

1) $f(x) = \frac{x^2}{3}$, $x \in \mathbb{R}$.

α) $f'(x) = \left(\frac{x^2}{3}\right)' = \frac{1}{3} \cdot (x^2)' = \frac{1}{3} \cdot 2x = \frac{2x}{3}$

Άρα $f'(3) = \frac{2 \cdot 3}{3} = 2$

β) Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο 3 είναι
$\lambda = f'(3) = 2$

γ) Η εφαπτομένη έχει εξίσωση $y = \lambda \cdot x + b$ όπου $\lambda = f'(3) = 2$ και διέρχεται από το σημείο $(3, f(3)) = (3, 3)$ αφού $f(3) = \frac{3^2}{3} = 3$

Συνεπώς $y = 2 \cdot x + b$ και αφού διέρχεται από το σημείο $(3,3)$ η εξίσωση επαληθεύει τις συντεταγμένες. Άρα, για $x=3$ και $y=3$ έχουμε:

$3 = 2 \cdot 3 + b \Leftrightarrow 3 = 6 + b \Leftrightarrow -3 = b$.

Δηλαδή η ευθεία έχει εξίσωση $y = 2 \cdot x - 3$

2) $f(x) = a \cdot x^2$ $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$

α) $f'(x) = (a \cdot x^2)' = a \cdot (x^2)' = a \cdot 2x = 2ax$

$f'(2) = 2 \cdot a \cdot 2 = 4a$

β) $\lambda = f'(2) \Leftrightarrow 4 = 4a \Leftrightarrow 1 = a$

3) $f(x) = x^2+1$, $x \in \mathbb{R}$

α) $f'(x) = (x^2+1)' = (x^2)' + (1)' = 2x + 0 = 2x$

$f'(0) = 2 \cdot 0 = 0$

β) $\lambda = f'(0) = 0$

γ) Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι της μορφής $y = \lambda \cdot x + \beta$ με $\lambda = f'(0) = 0$ και διέρχεται από το σημείο $(0, f(0)) = (0,1)$

Άρα $y = 0 \cdot x + \beta$ και επαληθεύει τις συντεταγμένες $(0,1)$. Συνεπώς $1 = \beta$.

Δηλαδή $y = 1$

4) $f(x) = x^2 - 5x + 6$, $x \in \mathbb{R}$

α) $f'(x) = (x^2 - 5x + 6)' = (x^2)' - (5x)' + (6)' = 2x - 5$

β) Αφού είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ θα έχει $\lambda = 0$. Συνεπώς πρέπει να προσδιορίσουμε σε ποιο σημείο η καμπύλη έχει παράγωγο ίση με 0.

Δηλαδή $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 5/2$.

Προφανώς $f'(5/2) = 0$. Επίσης $(5/2, f(5/2))$ είναι το σημείο από το οποίο διέρχεται. Άρα

$f\left(\frac{5}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 5 \cdot \left(\frac{5}{2}\right) + 6 = \frac{25}{4} - \frac{25}{2} + \frac{6}{1} = \frac{25 - 50 + 24}{4} = \frac{-1}{4}$

Τελικά η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $y = -\frac{1}{4}$.

5) $f(x) = 2x^2 - \alpha\cdot x \quad , x\in\mathbb{R}, \alpha\in\mathbb{R}$

α) $f'(x) = (2x^2 - \alpha x)' = (2x^2)' - (\alpha x)' = 2(x^2)' - \alpha(x)'$

$= 2\cdot 2x - \alpha\cdot 1 = 4x - \alpha$

$f'(2) = 4\cdot 2 - \alpha = 8 - \alpha$

β) Θα πρέπει $\lambda = \text{εφ}45° \Leftrightarrow f'(2) = 1 \Leftrightarrow 8 - \alpha = 1$

$\Leftrightarrow 8 - 1 = \alpha \Leftrightarrow 7 = \alpha$

6) $f(x) = -2x^2 + x - 3 \quad , x\in\mathbb{R}$

$f'(x) = (-2x^2 + x - 3)' = (-2x^2)' + (x)' - (3)' = -2\cdot 2x + 1 - 0$

$= -4x + 1$

$\lambda = \text{εφ}\omega \Leftrightarrow f'(\frac{1}{4}) = \text{εφ}\omega \Leftrightarrow -4\cdot\frac{1}{4} + 1 = \text{εφ}\omega \Leftrightarrow$

$-1 + 1 = \text{εφ}\omega \Leftrightarrow 0 = \text{εφ}\omega$ Άρα $\omega = 0°$

7) $S(t) = 2t + t^2$

α) $U_\mu = \frac{S(4) - S(0)}{4 - 0} = \frac{2\cdot 4 + 4^2 - 0}{4} = \frac{8 + 16}{4} = \frac{24}{4} = 6 \text{ m/sec}$

β) $U_{\text{στιγμ}} = S'(t) = (2t + t^2)' = (2t)' + (t^2)' = 2\cdot 1 + 2t$

$= 2 + 2t$

$U_{\text{στιγμ.}}(1) = S'(1) = 2 + 2\cdot 1 = 4 \text{ m/sec}$

8) $S(t) = 3t^2 - t$

α) $U_\mu = \frac{S(4) - S(2)}{4 - 2} = \frac{(3\cdot 4^2 - 4) - (3\cdot 2^2 - 2)}{4 - 2} = \frac{(48 - 4) - (12 - 2)}{2}$

$= \frac{44 - 10}{2} = \frac{34}{2} = 17 \text{ m/sec}$

β) $U_{\text{στιγμ}} = S'(t) = (3t^2 - t)' = 3\cdot 2t - 1 = 6t - 1$

$U_{\text{στιγμ}}(3) = S'(3) = 6\cdot 3 - 1 = 17 \text{ m/sec}$

9) $v(t) = 3t^2 - 5$ Άρα $v'(t) = 6t$

α) $a(t) = v'(t_0) = 6 \cdot t_0$

β) $a(10) = v'(10) = 6 \cdot 10 = 60$

10) $A(t) = 10 \cdot e^{0,04t}$

$A'(t) = (10 \cdot e^{0,04t})' = 10 \cdot e^{0,04t} \cdot (0,04t)' = 10 \cdot e^{0,04t} \cdot 0,04$
$= 0,4 \cdot e^{0,04t}$

$A'(25) = 0,4 \cdot e^{0,04 \cdot 25} = 0,4 \cdot e^1 = 0,4 \cdot e = 0,4 \cdot 2,718$
$= 1,087$ χιλιάδες/έτος

11) $f(x) = \frac{x^3}{e^x}$ $g(x) = e^x \cdot x^2$

α) $f'(x) = \left(\frac{x^3}{e^x}\right)' = \frac{(x^3)' \cdot e^x - x^3 \cdot (e^x)'}{(e^x)^2} = \frac{3x^2 \cdot e^x - x^3 \cdot e^x}{e^x \cdot e^x}$

$= \frac{\cancel{e^x}(3x^2 - x^3)}{\cancel{e^x} \cdot e^x} = \frac{3x^2 - x^3}{e^x}$

$g'(x) = (e^x \cdot x^2)' = (e^x)' \cdot x^2 + e^x (x^2)' = e^x \cdot x^2 + e^x \cdot 2x$
$= e^x \cdot (x^2 + 2x)$

β) $f'(1) = \frac{3 \cdot 1^2 - 1^3}{e^1} = \frac{3 - 1}{e} = \frac{2}{e}$

$g'(1) = e^1 \cdot (1^2 + 2 \cdot 1) = e \cdot (1+2) = 3 \cdot e$

12) $f(x) = 2x - x^2$

α) $f'(x) = (2x - x^2)' = 2 - 2x$

$f''(x) = (f'(x))' = (2-2x)' = -2$.

β) $(1-x) \cdot f''(x) + f'(x) = (1-x) \cdot (-2) + (2-2x) =$

$-2 + 2x + 2 - 2x = 0$

13) $f(x) = e^{2x}$

α) $f'(x) = (e^{2x})' = e^{2x} \cdot (2x)' = e^{2x} \cdot 2$

$f''(x) = (2e^{2x})' = 2(e^{2x})' = 2 \cdot e^{2x}(2x)' = 2 \cdot e^{2x} \cdot 2$

β) $2f'(x) - f''(x) = 2 \cdot e^{2x} \cdot 2 - 2 \cdot e^{2x} \cdot 2 = 0$

14) $f(x) = (3x-2) \cdot \sqrt{(x+1)^3}$

α) $f'(x) = \left((3x-2) \cdot \sqrt{(x+1)^3}\right)' =$

$(3x-2)' \cdot \sqrt{(x+1)^3} + (3x-2) \cdot \left(\sqrt{(x+1)^3}\right)' =$

$3 \cdot \sqrt{(x+1)^3} + (3x-2) \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{(x+1)^3}} \cdot \left((x+1)^3\right)' =$

$3 \cdot \sqrt{(x+1)^3} + \dfrac{3x-2}{2\sqrt{(x+1)^3}} \cdot 3(x+1)^2$

β) $f'(0) = 3\sqrt{(0+1)^3} + \dfrac{3 \cdot 0 - 2}{2\sqrt{(0+1)^3}} \cdot 3(0+1)^2 =$

$3 \cdot \sqrt{1} + \dfrac{-2}{2 \cdot \sqrt{1}} \cdot 3 \cdot 1 = 3 - 3 = 0$

15) $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$.

α) Επειδή $e^x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, έχουμε ότι $e^x + 1 \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα $A = \mathbb{R}$.

β) $f'(x) = \left(\dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)' = \dfrac{(e^x-1)' \cdot (e^x+1) - (e^x-1)(e^x+1)'}{(e^x+1)^2} =$

$\dfrac{e^x \cdot (e^x+1) - (e^x-1) \cdot e^x}{(e^x+1)^2} = \dfrac{\cancel{e^{2x}} + e^x - \cancel{e^{2x}} + e^x}{(e^x+1)^2} =$

$\dfrac{2 \cdot e^x}{(e^x+1)^2}$.

16) $f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$

α) λόγω παρονομαστή πρέπει $e^x - 1 \neq 0$. Άρα,

$e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow e^x = e^0 \Leftrightarrow x = 0$

Συνεπώς πρέπει $x \neq 0$. Δηλ. $A = \mathbb{R} - \{0\}$

β) $f'(x) = \left(\dfrac{x}{e^x - 1}\right)' = \dfrac{(x)' (e^x-1) - x \cdot (e^x-1)'}{(e^x-1)^2} =$

$= \dfrac{1 \cdot (e^x-1) - x \cdot e^x}{(e^x-1)^2} = \dfrac{e^x - 1 - x \cdot e^x}{(e^x-1)^2}$

17) $f(x) = \dfrac{1 - ημx}{1 - συνx}$

α) Λόγω παρονομαστή πρέπει $1 - συνx \neq 0$. Άρα

$1 - συνx = 0 \Leftrightarrow συνx = 1 \Leftrightarrow συνx = συν0 \Leftrightarrow x = 2κπ$, $κ \in \mathbb{Z}$

Δηλ. $A = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 2κπ, κ \in \mathbb{Z}\}$

β) $f'(x) = \left(\dfrac{1-\eta\mu x}{1-\sigma\upsilon\nu x}\right)' = \dfrac{(1-\eta\mu x)'(1-\sigma\upsilon\nu x) - (1-\eta\mu x)(1-\sigma\upsilon\nu x)'}{(1-\sigma\upsilon\nu x)^2} =$

$\dfrac{-\sigma\upsilon\nu x(1-\sigma\upsilon\nu x) - (1-\eta\mu x)\cdot \eta\mu x}{(1-\sigma\upsilon\nu x)^2} = \dfrac{-\sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu^2 x - \eta\mu x + \eta\mu^2 x}{(1-\sigma\upsilon\nu x)^2} =$

$\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}{(1-\sigma\upsilon\nu x)^2}$.

18) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 3x + 1$, $x \in \mathbb{R}$

α) $f'(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 3x + 1\right)' = \frac{1}{3}(x^3)' + 2(x^2)' + 3(x)' + (1)' =$

$\frac{1}{3}\cdot 3x^2 + 2\cdot 2x + 3\cdot 1 + 0 = x^2 + 4x + 3$

β) Για να είναι οι εφαπτόμενες της καμπύλης παράλληλες στον άξονα $x'x$ (οριζόντιες) θα πρέπει $f'(x) = 0$

Άρα θα βρούμε σε ποια σημεία μηδενίζεται η παράγωγος

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 3 = 0$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 4^2 - 4\cdot 1\cdot 3 = 16 - 12 = 4$

$x_{1,2} = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \dfrac{-4 \pm 2}{2} = \begin{cases} \frac{-4+2}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \\ \frac{-4-2}{2} = \frac{-6}{2} = -3 \end{cases}$

Συνεπώς στα σημεία $x = -1$ και $x = -3$ οι εφαπτόμενες είναι παράλληλες στον άξονα $x'x$.

19) $f(x) = (x+1)^2$, $x \in \mathbb{R}$

α) $f'(x) = ((x+1)^2)' = (x^2 + 2x + 1)' = 2x + 2$

β) $\lambda = f'(4) = 2\cdot 4 + 2 = 10$

20) $f(x) = -x^2+3x-1 \quad , x \in \mathbb{R}$

α) $f'(x) = (-x^2+3x-1)' = -2x+3$

β) Θα πρέπει $\lambda = εφ135^\circ \Leftrightarrow f'(x) = -1 \Leftrightarrow$

$-2x+3 = -1 \Leftrightarrow -2x = -4 \Leftrightarrow x = 2$

Άρα η εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο $(2, f(2))$ έχει κλίση ίση με -1.

$f(2) = -2^2+3\cdot 2-1 = -4+6-1 = 1$

Η εξίσωση της ευθείας είναι της μορφής $y = \lambda x + \beta$ με $\lambda = -1$ και επαληθεύει τις συντεταγμένες του σημείου $A(2,1)$. Συνεπώς,

$y = \lambda x + \beta \Leftrightarrow y = -x + \beta$ Για $x=2$, $y=1$ δίνει

$1 = -2+\beta \Leftrightarrow 3 = \beta$

Τελικά η εξίσωση είναι $y = -x+3$

21) $f(x) = a(x+1)^2 \quad , x \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}$

α) $f'(x) = (a(x+1)^2)' = (a(x^2+2x+1))' = a((x^2)'+(2x)'+(1)') =$

$a\cdot(2x+2) = 2ax+2a$

β) $\lambda = 4 \Leftrightarrow f'(1) = 4 \Leftrightarrow 2a\cdot 1+2a = 4 \Leftrightarrow 4a = 4$

$\Leftrightarrow a = 1$

γ) Για $a=1$ έχουμε $f(1) = a(1+1)^2 = 1\cdot 2^2 = 4$

Άρα $\lambda = 4$ και διέρχεται από το σημείο $(1,4)$

Δηλαδή, $y = 4x+\beta$ Για $x=1, y=4$ δίνει

$4 = 4\cdot 1+\beta \Leftrightarrow \beta = 0$ Συνεπώς $y = 4x$